La programmation mathématique en nombres entiers

Évaluation par relaxation

Stanislas Francfort

Orange Labs

5 Juin 2017

Évaluation par relaxation

- Important : pour résoudre efficacement un PMD, il faut fournir des bornes intéressantes
- borne inf en maximisation et borne sup en minimisation
- on les obtient par relaxation :
  - élargir l'ensemble des solutions. Exemple : relaxation de contraintes, relaxation continue
  - soit le fait de remplacer la fonction objective par une autre fonction ayant la même valeur optimale. Exemple : relaxation lagrangienne

Relaxation continue

- la relaxation continue est très efficace
- **Mais** la relaxation continue n'est pas forcemment la meilleure qui existe
- Améliorable en utilisant des idées spécifiques au problème.
- Amélioration pour PLNE :
  - ajouter des contraintes
  - renforcer des variables
  - reformulation

Relaxation lagrangienne

- Relaxation Lagrangienne basée sur dualité Lagrangienne
- Principe : ajouter des termes d'une inégalité dans la fonction objective en ajoutant un multiplicateur visant à pénaliser la fonction objective si la solution trouvée ne vérifie pas cette inégalité
- Cette relaxation fournit fréquemment de très bonne valeur de relaxation
- Très utile aussi pour la *décomposition* des problèmes

Définitions et résultats généraux

- Soit le PM suivant :

$$\begin{aligned} &Min\ f(x) \\ &\qquad g_i(x) \le 0,\ \forall i \in I \\ &\qquad x \in S \subseteq \mathbb{R} \end{aligned}$$

- On associe a chaque contrainte $\in I$ une valeur réelle $\lambda_i \geq 0$ que l'on appelle *multiplicateur de Lagrange*
- on note le vecteur réel $\lambda = (\lambda_i, i \in I)$
- On pose la *fonction de Lagrange* :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x)$$

- On suppose que le problème $Min_{x \in S}\{L(x, \lambda)\}$ a une solution optimale pour tout $\lambda \geq 0$.

Définitions et résultats généraux

Définition
Pour des vecteurs $\overline{x}$ et $\overline{\lambda} \geq 0$ donnés, on dit que le couple $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ est un *point-selle* de la fonction de Lagrange si

$$L(\overline{x}, \lambda) \leq L(\overline{x}, \overline{\lambda}), \ \forall \lambda \geq 0$$
$$L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leq L(x, \overline{\lambda}), \ \forall x \in S$$

En d'autre terme, un point-selle $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ est un maximum de la fonction L en $\overline{\lambda}$ pour x fixé, et en $\overline{x}$ pour λ fixé.

Définitions et résultats généraux

Caractérisation des points-selles :

Theorem

Etant donnés des vecteurs $\overline{x}$ et $\overline{\lambda} \geq 0$, le couple $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ est un point-selle de la fonction de Lagrange si et seulement si

$$i)\ L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = Min_{x \in S}\{L(x, \overline{\lambda})\}$$
$$ii)\ g_i(\overline{x}) \leq 0,\ \forall i \in I$$
$$iii)\ \overline{\lambda}_i g_i(\overline{x}) = 0,\ \forall i \in I$$

Preuve : $(\Rightarrow)$ La condition $i)$ se déduit par construction d'un point-selle.

Par définition, on sait que $\forall \lambda \geq 0,\ L(\overline{x}, \lambda) \leq L(\overline{x}, \overline{\lambda})$ ce qui peut s'écrire également

$$\sum_{i \in I} \lambda_i g_i(\overline{x}) \leq \sum_{i \in I} \overline{\lambda}_i g_i(\overline{x}),\ \forall \lambda \geq 0\ (*)$$

Définitions et résultats généraux

Preuve (suite) : Supposons que *ii*) soit faux et qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $g_{io}(\overline{x}) > 0$, dans ce cas, en prenant λ_{i0} très grand, on ne vérifierait pas $(*)$, une contradiction. Donc *ii*) est vérifié.
En appliquant $(*)$ avec $\lambda = 0$, on obtient $\sum_{i \in I} \overline{\lambda}_i g_i(\overline{x}) \geq 0$, or comme par définition $\overline{\lambda}_i \geq 0$ et $g_i(\overline{x}) \leq 0$ pour tout $i \in I$, on obtient donc *iii*).
$(\Leftarrow)$ Par la propriété *i*), on sait que pour tout $x \in S, \ L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leq L(x, \overline{\lambda})$, c'est-a-dire une partie de la définition d'un point-selle.
Par *ii*), pour tout $\lambda \geq 0, \ L(\overline{x}, \lambda) = f(\overline{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(\overline{x})$. De plus, par *iii*), comme $\overline{\lambda}_i g_i(\overline{x}) = 0, \ \forall i \in I$, on obtient que $L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = f(\overline{x})$.
Par conséquent, $L(\overline{x}, \lambda) \leq f(\overline{x}) = L(\overline{x}, \overline{\lambda})$. Donc $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ est un point-selle pour L.
Fin Preuve

Définitions et résultats généraux

Lien entre point-selle et optimum du PMD.

Theorem

Etant donne un point-selle $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ *pour L défini par les vecteurs* $\overline{x}$ *et* $\overline{\lambda} \geq 0$, *alors* $\overline{x}$ *est un optimum global pour le PMD.*

Preuve : En appliquant le théorème précédent, on sait par i) que pour tout $x \in S$

$$f(\overline{x}) + \sum_{i \in I} \overline{\lambda}_i g_i(\overline{x}) \leq f(x) + \sum_{i \in I} \overline{\lambda}_i g_i(x)$$

Or, par iii) on obtient :

$$f(\overline{x}) \leq f(x) + \sum_{i \in I} \overline{\lambda}_i g_i(x)$$

et par ii), comme de plus $\lambda \geq 0$, on obtient finalement que $f(\overline{x}) \leq f(x)$ pour tout $x \in S$. **Fin Preuve**

Définitions et résultats généraux

- Ces théorèmes permettent d'utiliser la fonction de Lagrange pour résoudre le PM
- Cela ramène parfois à des problèmes d'optimisation continue en ôtant des contraintes difficiles
- **Mais** il faut qu'il existe un point-selle pour L ! !
- or il n'existe pas de point-selle pour les PLNE...

Dualité lagrangienne

Soit la fonction, de *dualité lagrangienne*, suivante :

$$w(\lambda) = inf_{x \in S}\{L(x, \lambda)\}, \ \forall \lambda \geq 0$$

Pour les ensembles S discrets finis, cette fonction peut s'écrire plus simplement

$$w(\lambda) = min_{x \in S}\{L(x, \lambda)\}, \ \forall \lambda \geq 0$$

On définit alors le *problème dual (lagrangien)* du PL :

$$Max_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+} w(\lambda) \ (= Max_\lambda\{Min_{x \in S} L(x, \lambda)\})$$

Ce problème dual revient à chercher un point-selle pour L.
Remarque : ce problème est défini même s'il n'existe pas de point-selle (ce qui est le cas pour un PLNE).

Dualité lagrangienne

Théorèmes concernants la dualité :

Theorem (Théorème de la dualité faible)

Si l'on note $f(x^\star)$ l'optimum global de f et $w(\lambda^\star)$ l'optimum global du problème dual, alors Pour tout $\lambda \geq 0, \; w(\lambda) \leq w(\lambda^\star) \leq f(x^\star)$

Preuve : Soit $\lambda \geq 0$. Par définition de la fonction duale, on a $w(\lambda) \leq f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x)$, pour tout $x \in S$. Comme $\lambda g(x) \leq 0$ pour tout $x \in S, \; w(\lambda^\star) \leq f(x)$.
En particulier, pour tout $x^\star$ et $\lambda^\star$, solutions optimales, on a donc $w(\lambda) \leq w(\lambda^\star) \leq f(w^\star)$
Fin Preuve

Dualité lagrangienne

Theorem (Concavité de la fonction duale)

La fonction duale $\lambda \to w(\lambda)$ est une fonction concave de λ.

Preuve : Soit λ^1 et λ^2 deux vecteurs réels positifs et soit $t \in [0, 1]$.
Posons alors $\lambda = t\lambda^1 + (1 - t)\lambda^2$.
Pour ce λ donné, on sait par hypothèse qu'il existe un $\overline{x}$ tel que

$$w(\lambda) = f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x)$$

D'autre part, par définition de w appliquée à λ^1 et λ^2, on a

$$w(\lambda^1) \leq f(\overline{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i^1 g_i(\overline{x}) \text{ et } w(\lambda^2) \leq f(\overline{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i^2 g_i(\overline{x})$$

Dualité lagrangienne

Preuve (suite)

Par combinaison linéaire des deux inégalités, on obtient donc

$$tw(\lambda^1) + (1-t)w(\lambda^2) \leq f(\overline{x}) + \sum_{i \in I} (t\lambda^1 + (1-t)\lambda^2) g_i(\overline{x})$$

Par conséquent,

$$tw(\lambda^1) + (1-t)w(\lambda^2) \leq f(\overline{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(\overline{x}) = w(\lambda)$$

Fin Preuve

Ainsi la fonction w est concave $\Rightarrow$ utilisation des outils efficaces de l'optimisation continue.

Aucune hypothèse n'a été faite sur la nature des fonctions f et g_i, ni sur la convexité de S.

Dualité lagrangienne

- Si S discret, alors la fonction f n'est pas différentiable en tout point
- mais w concave $\Rightarrow$ tout optimum local de w est global
- $\Rightarrow$ le problème dual est en général plus facile a résoudre que le problème primal.

Dualité lagrangienne

Theorem (Théorème de la dualité)

Si le problème PM admet un point-selle $(x^\star, \lambda^\star)$ *alors* $w(\lambda^\star) = f(x^\star)$.
Inversement, s'il existe $x^\star$ *et* $\lambda^\star \geq 0$ *tels que* $w(\lambda^\star) = f(x^\star)$, *alors le PM admet un point-selle et* $(x^\star, \lambda^\star)$ *est un tel point-selle.*

- Le théorème de dualité $\Rightarrow$ si le PM admet un point-selle, optimiser w revient à optimiser f.

Dualité lagrangienne

- La théorie de la dualité permet de ramener, lorsqu'il y a des points-selles, le PLNE à la minimisation d'une fonction concave
- $\Rightarrow$ Utilisation des méthodes de sous-gradient pour cette fonction.
- Remarque : la dualité lagrangienne appliquée a un programme linéaire est en fait équivalente a la dualité "classique"
- **Mais** un PLNE ne possède pas en général de point-selle $\Rightarrow$ dualité pas applicable directement pour S discret
- l'écart $f(x^\star) - w(\lambda^\star)$ est souvent non nul

Saut de dualité

- On appelle *saut de dualité* le fait que la valeur $f(x^\star) - w(\lambda^\star)$ soit non nul.
- C'est le cas lorsqu'un PM ne possède de point-selle pour sa fonction duale associée
- C'est le cas par exemple de la plupart des PMD

Saut de dualité

Exemple : $S = \{0,1\}^3$

$$Min\ f(x) = 10 - 3x_1 - 2x_2 - x_3$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 4$$
$$x = \{x_1, x_2, x_3\} \in \mathbb{N}^3$$

L'ensemble des points de S est $y^1 = (0,0,0)$, $y_2 = (1,0,0)$, $y_3 = (0,1,0)$, $y_4 = (1,1,0)$, $y_5 = (0,0,1)$, $y_6 = (1,0,1)$, $y_7 = (0,1,1)$ et $y_8 = (1,1,1)$.
Parmi elles, on trouve une solution optimale au PLNE pour $y_2 = (1,0,0)$ qui vaut $f(y_2) = 7$.
En posant $g(x) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4$, on définit la fonction de Lagrange pour chaque point y^i de S comme étant :

$$\begin{aligned} L(y^i, \lambda) = f(y^i) + \lambda g(y^i) = & 10 - 3y_1^i - 2y_2^i - y_3^i \\ & + (2y_1^i + 3y_2^i + 4y_3^i - 4)\lambda,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Saut de dualité

$$L(y^i,\lambda) = 10 - 3y_1^i - 2y_2^i - y_3^i + (2y_1^i + 3y_2^i + 4y_3^i - 4)\lambda,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+$$

C'est à dire :

$$L(y^1,\lambda) = 10 - 4\lambda,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}_+,\ L(y^5,\lambda) = 9,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}_+$$
$$L(y^2,\lambda) = 7 - 2\lambda,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}_+,\ L(y^6,\lambda) = 6 + 2\lambda,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}_+$$
$$L(y^3,\lambda) = 8 - \lambda,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}_+,\ L(y^7,\lambda) = 7 + 3\lambda,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}_+$$
$$L(y^4,\lambda) = 5 + \lambda,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}_+,\ L(y^8,\lambda) = 4 + 5\lambda,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}_+$$

La fonction duale du PMD est $w(\lambda) = Min_{i\in\{1,\dots,8\}}\{L(y^i,\lambda)\}\forall\lambda \geq 0$ qui est facile à calculer pour un λ donné (essayer avec $\lambda = 0$, 0.5, 1).

Saut de dualité

- Calcul de la fonction duale $w(\lambda)$
- par exemple : $w(0) = 4$, $w(0.5) = 5.5$ et $w(1) = 5$
- Résoudre le dual : $Max_{\lambda \geq 0} w(\lambda)$
- Or w est concave !
- On sait donc par les valeurs (en 0, 0.5 et 1) que l'optimum sera atteint sur l'intervalle $[0, 1]$
- On peut ainsi rechercher par dichotomie
- on a un maximum (point le plus haut de l'enveloppe des droites $L(y^i, \lambda)$)
- après calcul simple, $\lambda^\star = \frac{2}{3}$, et $w(\lambda^\star) = \frac{17}{3}$
- (note : dans cet exemple, relaxation linéaire = relaxation lagrangienne)
- $\Rightarrow$ Saut de dualité $= f(y^2) - w(\lambda^\star) = 7 - \frac{17}{3} = \frac{4}{3}$

La relaxation lagrangienne

- Utilisation principale de la dualité lagrangienne : *relaxation lagrangienne*
- c'est-a-dire appliquer la fonction de Lagrange pour un sous-ensemble bien choisi de contraintes.
- Soit le PM :

$$
\begin{aligned}
&Min\ f(x) \\
&\qquad g_i(x) \leq b_i,\ \forall i \in I \\
&\qquad x \in S \subseteq \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

Avec S est un ensemble non trivial pouvant être lui-mème défini par des contraintes.

La relaxation lagrangienne

- On choisira d'appliquer la relaxation lagrangienne aux contraintes g_i dans le cas où :
  - le problème de minimisation de la fonction lagrangienne obtenue sur S doit pouvoir être fait de manière efficace et exacte.
  - l'ensemble des contraintes g_i relaxée n'est pas trop important et bien choisie pour limiter le nombre de multiplicateur à manipuler.
- Le but de la relaxation $\Rightarrow$ donner de bonnes bornes d'évaluation du problème.

La relaxation lagrangienne

- Exemple fréquent : un PLNE avec des contraintes jugées "difficiles" à traiter
- On peut alors écrire le PLNE :

$$\begin{aligned} Min\ c^T x & \\ Ax &\leq b \\ Cx &\leq d \\ x &\in \mathbb{N}^n \end{aligned}$$

- où on souhaite enlever les contraintes $Ax \leq b$
- par exemple si elles sont "couplantes"

La relaxation lagrangienne

- Comparaison relaxation linéaire et relaxation lagrangienne d'un PLNE

Relaxation continue :

$$
\begin{aligned}
Min\ c^T x & \\
Ax &\leq b \\
Cx &\leq d \\
x &\in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

Relaxation lagrangienne :

$$
\begin{aligned}
Max_\lambda\ Min_{x \in S}\{L(x, \lambda)\} & \\
S = \{x \in \mathbb{N}^n | Cx \leq d\} &
\end{aligned}
$$

La relaxation lagrangienne

Theorem (lemme)

La valeur optimale du dual lagrangien (D_L) est égale a la valeur optimale du problème suivant :

$$\begin{aligned} Min\ & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \in conv(S). \end{aligned}$$

Preuve : On se limite ici au cas où S contient un nombre fini de points que l'on note $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_K\}$. Dans ce cas, la fonction de Lagrange est alors $w(\lambda) = Min_{k=1,\ldots,K}\{c^T x^k + \lambda^T(Ax^k - b)\}$.

La relaxation lagrangienne

Preuve (suite) :
On peut voir que le dual lagrangien (D) peut se réécrire alors comme le PL en variables linéaires $(\lambda, z) \in \mathbb{R}^{m+1}$ suivant :

$$
\begin{aligned}
&Max\ z \\
&\qquad z \leq c^T x^k + \lambda^T (Ax^k - b),\ \forall k \in \{1, \ldots, K\} \\
&\qquad \lambda \in \mathbb{R}^m_+ \\
&\qquad z \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

En associant aux contraintes du PL précédent les variables duales de la PL $uk \geq 0$, on va prouver que l'on obtient le programme dual de la PL du programme linéaire précédent :

La relaxation lagrangienne

Preuve (suite) :
Association des variables duales aux contraintes du PL, pour obtenir le programme dual de la PL du programme linéaire précédent :

$$Min \sum_{i=1}^{K}(c^T x^k)u_k$$

$$\sum_{i=1}^{K}(Ax^k)u_k \leq b$$

$$\sum_{i=1}^{K} u_k = 1$$

$$u_k \in \mathbb{R}_+, \ \forall k \in \{1, \ldots, K\}$$

La relaxation lagrangienne

Preuve (suite) :

- premières contraintes correspondent aux variables λ
- dernières contraintes correspondent aux variable z
- les contraintes associées aux variables λ n'est pas immédiat : pour l'obtenir, il faut remarquer que les contraintes de (PL) peuvent chacune s'écrire :

$$z - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (A^i x^k - b_i) \leq c^T x^k$$

où A^i désigne le vecteur ligne correspondant a la ligne i de A.

La relaxation lagrangienne

Preuve (suite) :
Donc la contrainte associée a la variable λ_i (du dual lagrangien) est alors :

$$-\sum_{k=1}^{K}(A^i x^k - b_i)u_k \geq 0$$

$$i.e. \sum_{k=1}^{K} A^i x^k u_k \leq b_i \sum_{k=1}^{K} u_k$$

Par la dernière contrainte $\sum_{i=1}^{k} u_k = 1$, on obtient alors la contrainte correspondante dans le dual lagrangien.

La relaxation lagrangienne

Preuve (suite) :
Considérons à présent un point x quelconque de $conv(S)$, par définition il existe un vecteur $t \in \mathbb{R}_+^K$ tel que $\sum_{i=1}^{k} t_k = 1$ et $x = \sum_{i=1}^{k} t_k x^k$. On remarque donc que le programme dual de la programmation linéaire revient en fait à rechercher un point $x = \sum_{i=1}^{K} u_k x^k$ dans $conv(S)$.
Par conséquent le dual de la programmation linéaire est exactement équivalent au programme donné dans l'énoncé du lemme.
Fin Preuve

- Si $conv(S) \subsetneq \{x \in \mathbb{R}^n | Cx \leq d\}$, ce qui est le cas plus fréquent en PLNE,
- Alors la relaxation lagrangienne donne une meilleure évaluation que la relaxation linéaire.

Application au problème du voyageur de commerce

- Soit $G = (V, E)$ un graphe
- on recherche un circuit hamiltonien de plus petite longueur
- où $c(e)$, $e \in E$, est la longueur associée a une arête.
- Soit 1 un sommet et $G \backslash 1$ le graphe dont on a supprimé 1 et ses arêtes incidentes
- On appelle un 1-*arbre* de G un arbre couvrant de $G \backslash 1$ auquel on ajoute deux arêtes quelconque incidente a 1.
- Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des 1-arbre de G

- Remarque : un cycle hamiltonien est un 1-arbre pour lequel chaque sommet a exactement un degré 2

Application au problème du voyageur de commerce

- Pour $T \in \mathcal{T}$ un 1-arbre de G
- on pose le *vecteur d'incidence* χ^T tel que $\forall e \in E,\ \chi^T(e) = 1$ si $e \in T$ et 0 sinon
- on note également $\chi(\mathcal{T}) = \{\chi^T | T \in \mathcal{T}\}$
  - i.e. l'ensemble des vecteurs d'incidence des 1-arbres de G.

Application au problème du voyageur de commerce

- On pose alors les variables binaires suivantes : $x(e) = 1$ si on choisit l'arête $e \in E$, 0 sinon
- on a alors :

$$
\begin{aligned}
Min \sum_{e \in E} c(e)x(e) \\
\sum_{e \in \delta(u)} x(e) = 2,\ \forall u \in V \\
x \in \chi(T)
\end{aligned}
$$

- le vecteur x solution est nécessairement un 1-arbre tel que le degré de chacun de ses sommets est exactement 2.

Application au problème du voyageur de commerce

- Soit w un poids positif associé aux arêtes de G
- on sait résoudre efficacement le problème suivant :
  - optimiser une fonction linéaire $\sum_{e \in E} \overline{c}(e)x(e)$ sur l'ensemble $\chi(T)$.
  - en recherchant un arbre couvrant de poids minimum au sens du poids w dans $G \backslash 1$
  - et en ajoutant les deux arêtes incidentes à 1 de plus faibles valeurs selon w.
- On va ramener le problème du voyageur de commerce à la résolution du problème precedent
- grâce à une relaxation lagrangienne des contraintes $\sum_{e \in \delta(u)} x(e) = 2,\ \forall u \in V$
- $\forall u \in V$, on pose les fonctions $g_u(x) = \sum_{e \in \delta(u)} x(e) - 2,\ \forall x \in \chi(\mathcal{T})$

Application au problème du voyageur de commerce

- La fonction de Lagrange est alors :

$$L(x, \lambda) = c^T x + \sum_{u \in V} \lambda_u g_u(x), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^n_+$$

- Cette fonction est la somme, pour chaque arête $e = uv \in E$, de la variable $x(e)$ multipliée par la somme de $c(e)$ et de $\lambda(u) + \lambda(v)$
- Donc :

$$L(x, \lambda) = \sum_{uv \in E} (c(uv) + \lambda_u + \lambda_v) x(uv) - 2 \sum_{u \in V} \lambda_u$$

Application au problème du voyageur de commerce

- On remarque alors que le dernier terme de L est la constante $K = -2\sum_{u \in V} \lambda_u$ lorsque λ est fixé
- De plus, posons $\overline{c}(uv) = c(uv) + \lambda_u + \lambda_v, \ \forall uv \in E$
- On obtient alors : $L(x, \lambda) = \sum_{uv \in E} \overline{c}(uv) x(uv) - K$ qui est alors une fonction linéaire
- On sait donc calculer pour tout vecteur $\lambda \geq 0$, la valeur de la fonction duale

$$w(\lambda) = Min_{x \in \chi(\mathcal{T})} L(x, \lambda)$$

Application au problème du voyageur de commerce

- On a donc exprimée la fonction duale (convexe)
- Appliquons un algorithme de sous-gradient pour calculer le maximum de la fonction w sur λ
- en fait, il existe des formules automatiques pour calculer ici
- Les expérimentations de cette technique permettent de résoudre le problème de voyageur de commerce pour des tailles intéressantes
- en effet, on dispose d'algorithme permettant de découvrir une solution x correspondant aux bonnes valeurs de λ
- En utilisant simplement un algorithme pour déterminer une bonne valeur de λ, on donne également une très bonne évaluation du coût d'une tournée hamiltonienne.