La programmation mathématique en nombres entiers

Points extrêmes et cas polynomiaux

Stanislas Francfort

Orange Labs

5 Juin 2017

Points extrêmes et cas polynomiaux

- Cas particuliers :
- la relaxation linéaire d'un PLNE fournit une solution entière.

Polyèdre et points extrêmes

- Un *polyèdre* est une figure géométrique délimitée par des "plans"
- Dans un espace à une dimension, les "plans" sont des points et les polyèdres sont des intervalles connexes
- Dans un espace à deux dimensions, les "plans" sont des droites et les polyèdres sont des carrés, des rectangles,...
- Dans un espace de dimension 3, les "plans" sont des plans et les polyèdres sont des cubes, des dodécaèdres,...
- En fait, dans $\mathbb{R}^n$, on appelle *hyperplan* H un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ défini comme l'ensemble des points vérifiant une équation linéaire
- c'est-a-dire qu'il existe $a_0, \ldots, a_n$, tels que $H = \{x \in \mathbb{R}^n | a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b\}$.

Polyèdre et points extrêmes

Définition : Un polyèdre $P \subseteq \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système fini d'inégalités linéaires, i.e. :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$$

où A est une matrice $m \times n$ (m et n entiers positifs) et $b \in \mathbb{R}^m$.

- le système $Ax \leq b$ définit (ou caractérise) le polyèdre P.
- (Remarque : nous ne considérons que le polyèdres rationnels)
- un *point* d'un polyèdre est défini par ses coordonnées $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $A\tilde{x} \leq b$
- un *polytope* est un polyèdre borné

Polyèdre et points extrêmes

Définition : Un point x d'un polyèdre P est dit *point extrême* ou *sommet* de P s'il n'existe pas deux solutions $x^1, x^2 \in P$ telles que $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$

- i.e. pas le milieu d'un segment contenu dans P

Theorem

Soit $P = \{Ax \leq b\}$ un polyèdre de $\mathbb{R}^n$. Soit $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ un point. On note alors $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ la sous-matrice des contraintes de $Ax \leq b$ formée par les inégalités vérifiées à l'égalité par $\tilde{x}$.
Alors $\tilde{x}$ est un point extrême de P si et seulement si l'ensemble $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ est de rang n.

Autrement dit, un point $\tilde{x}$ est extrême si on peut produire n inégalités vérifiées par $\tilde{x}$ à l'égalité, et qui sont linéairement indépendantes.

Points extrêmes et polyèdres entiers

- Deux résultats issus de l'algorithme du simplexe :
  - toutes les solutions optimales d'un PL se situent sur l'un des hyperplans définissant le polyèdre des solutions
  - l'ensemble des points extrêmes du polyèdre des solutions contient au moins une solution optimale
- donc : on peut limiter la recherche des solutions optimales.

Que se passe-t-il pour un PLNE si on le superpose à la "grille" des points de coordonnées entières ?

Points extrêmes et polyèdres entiers

- Un polyèdre est dit *pointu* s'il contient au moins un point extrême
- Par exemple, le polyèdre $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$ ne contient pas de points extrêmes
- Un polyèdre est dit *rationnel* s'il peut être défini par un système où toutes les inégalités ont des coefficients rationnels.

On étudiera par la suite des polyèdres rationnels pointus (ce qui n'est pas très restrictif)

- on dit qu'un point de $\mathbb{R}^n$ est entier si ses coordonnées sont entières
- un polyèdre est dit entier si tous ses points extrêmes sont entiers.

Points extrêmes et polyèdres entiers

Theorem

Un polytope rationnel P est entier si et seulement si, pour tout vecteur entier c, la valeur optimale de $Max\{c^T x | x \in P\}$ est entière.

Preuve : Le sens direct est immédiat.
Inversement, considérons $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ un point extrême de P (il en existe car il est pointu).
Admettons que l'on puisse prouver qu'il existe un vecteur entier w tel que v soit l'unique solution optimale de $Max\{w^T x | x \in P\}$ (admettons-le). Prenons $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda w^T v \geq \lambda w^T u + u_1 - v_1$ pour tout u point extrême de P. On peut noter que v est encore l'unique solution optimale de $Max\{\lambda w^T x | x \in P\}$.

Points extrêmes et polyèdres entiers

Preuve (suite) : Ainsi, en posant le poids $\overline{w} = (\lambda w_1 + 1, \lambda w_2, \ldots, \lambda w_n)^T$, on voit que v est aussi une solution optimale de $Max\{\overline{w}^T x | x \in P\}$ car $\lambda w^T v > x$ pour tout $x \in P$. Or, par construction $\overline{w}^T v = \lambda^T v + v_1$, et comme, par hypothèse, $\overline{w}^T v$ et $\lambda w^T v$ sont entiers, alors v_1 est entier. On peut reproduire cela pour toutes les composantes donc u est entier.
Fin Preuve

- Les polyèdres dont les sommets coïncident avec la “grille” des entiers représentent un cas particulier très intéressant pour la résolution des PLNE !

Totale unimodularité et cas polynomial

- Pouvons-nous caractériser les matrices correspondant a des polyèdres entiers ?
- Une matrice carrée A est dite *unimodulaire* si A est entière et si son déterminant vaut $+1$ ou -1.

Theorem (Lemme)

Soit A une matrice carrée de taille m entière, inversible. Alors $A^{-1}b$ est un vecteur entier pour tout vecteur entier b de taille m
si et seulernent si
A est unimodulaire.

Preuve : Par un résultat classique d'algèbre linéaire, on sait que $A^{-1} = \frac{A^{adj}}{det(A)}$ où A^{adj} est la matrice adjointe de A

Totale unimodularité et cas polynomial

Preuve (suite) : La matrice adjoint est la matrice obtenue en transposant la matrice des cofacteurs $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ et où M_{ij} est le déterminant de la sous-matrice obtenue depuis A en supprimant la ligne i et la colonne j. Donc si A est entière, A^{adj} est aussi entière. Donc si A est unimodulaire, A^{-1} est entière et donc $A^{-1}b$ est un vecteur entier.
Inversement, si $A^{-1}b$ est un vecteur entier pour tout vecteur entier b de taille m, alors en particulier $A^{-1}e_i$, est entier pour e_i, le $i$ème vecteur unité pour tout $i = 1, \ldots, m$. Donc A^{-1} est entière et donc $det(A)$ et $det(A^{-1})$ sont tous deux entiers. Comme $det(A) \times det(A^{-1}) = 1$, on a donc $det(A) = 1$ ou -1.
Fin Preuve

Totale unimodularité et cas polynomial

- Une matrice A $n \times m$ est donc unimodulaire si A est entière, et si la matrice associée à chacune de ses bases a un déterminant $+1$ ou -1.
- *base* : ensemble de m vecteurs colonnes linéairement indépendants
- *matrice associée à une base* : sous-matrice carrée $m \times m$ inversible.

On peut alors prouver le résulat suivant.

Theorem (Veinott et Dantzig)

Soit A une matrice $m \times n$ entière de plein rang. Le polyèdre défini par $Ax = b,\ x \geq 0$ est entier pour tout vecteur b entier si et seulement si A est unimodulaire.

Totale unimodularité et cas polynomial

- On appelle une matrice *totalement unimodulaire (TU)* une matrice telle que toutes ses sous-matrices carrées ont un déterminant valant 0, 1 ou -1.
- donc, ses coefficients sont donc uniquement 0, 1 et -1.
- Remarque : une matrice A $m \times n$ est TU si et seulement si la matrice $[AI]$ de taille $m \times (m+n)$, est unimodulaire.

Theorem (Hofiman-Kruskall)

Soit A une matrice $m \times n$ TU. Alors le polyèdre défini par $Ax \leq b,\ x \geq 0$ est entier pour tout vecteur b entier.

Attention ce théorème n'est pas une caractérisation des polyèdres entiers.

Totale unimodularité et cas polynomial

- il n'est pas évident de détecter si une matrice est TU
- Un théorème de Seymour (1980) prouve en fait que ces matrices peuvent être construites selon un schéma particulier.
- ... ce résultat est assez complexe
- Mais : il existe des cas particulier de matrice TU très connus.

Theorem (Poincaré 1900)

Soit A une matrice dont les coefficients sont 0, 1 ou -1 et telle que chaque colonne contient au plus une fois le coefficient 1 et au plus une fois le coefficient -1. Alors A est TU.

- $\Rightarrow$ les matrices de flots sont TU
- $\Rightarrow$ les matrices du problème du couplage biparti qui sont TU (multiplier par -1 les inégalités $\sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 1, \; \forall u \in V_2$

Totale duale intégralité et min-max

- Rappelons le résultat de dualité forte :

$$\text{(PR)}\ max\{c^T x | Ax \leq b\} = min\{y^T b | y^T A = c, y \geq 0\}\ \text{(DE)}$$

On dit que $Ax \leq b$ est *totalement dual intégral* (TDI) si, $\forall c \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une solution optimale de (PR), alors cette solution peut être obtenue par un vecteur y entier dans (DE).

Theorem (Edmonds, Giles)

Soit $Ax \leq b$ un système TDI avec $P = \{x | Ax \leq b\}$ rationnel et b entier. Alors P est un polytope entier.

Totale duale intégralité et min-max

Preuve :
Par la propriété TDI, pour tout solution optimale x du problème, il existe un vecteur y solution du dual qui soit entier et qui réalise cet optimum, c'est a dire tel que $c^T x = y^T b$. Or comme b est entier, si y est entier, $c^T x$ est donc entier. Donc x est entier (par un théorème précédent (*)). Donc P est entier.
Fin Preuve
(*)Un polytope rationnel P est entier ssi pour tout vecteur entier c, la valeur optimale de $Max\{c^T x | x \in P\}$ est entière

- il est donc utile de regarder le problème combinatoire défini dualement pour un problème OC donné
- cela donnera des résultat min-max

Totale duale intégralité et min-max

- Une caractérisation de systèmes TDI est-elle utile ? ?
- Non car tout système peut devenir TDI
  - Soit $Ax \leq b$, alors $\exists t \in \mathbb{R}_+$ tq $\frac{1}{t}Ax \leq \frac{1}{t}b$ soit TDI.
- cela ne donne donc aucune information sur la structure combinatoire du système

Totale duale intégralité et min-max

Theorem (Giles and Pulleyblank)

Soit P un polyèdre rationnel. Alors il existe un système TDI $Ax \leq b$ avec A entier tel que $P = \{Ax \leq b\}$. De plus, si P est entier, alors b peut-être choisi entier

- $\Rightarrow$ il existe toujours un système TDI pour tout polyèdre P entier
- $\Rightarrow$ il existe un système ayant toujours des solutions entières
- $\Rightarrow$ Déterminer un système TDI donne un moyen de prouver l'intégrité d'un polyèdre
- Application : dualité des problèmes flot-max/coupe-min

Points fractionnaires du problème du sac-a-dos

- montrer que $(1, 1, \frac{4}{5})$ est un point extrême du problème du sac à dos :

$$\begin{aligned}
Max\ & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\
& 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 8 \\
& x_i \leq 1,\ \forall i = 1, 2, 3 \\
& x_i \geq 0,\ \forall i = 1, 2, 3 \\
& x_i \in \mathbb{N},\ \forall i = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

Points fractionnaires du problème du sac-a-dos

- montrer que $(1, 1, \frac{4}{5})$ est un point extrême du problème du sac à dos :

$$
\begin{aligned}
Max\ & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\
& 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 8 \\
& x_i \leq 1,\ \forall i = 1,2,3 \\
& x_i \geq 0,\ \forall i = 1,2,3 \\
& x_i \in \mathbb{N},\ \forall i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

- les 4 inégalités sont satisfaites
- 3 inégalités sont satisfaites à l'égalité
- ces 3 inégalités sont indépendantes
- donc ce point est un point extrême fractionnaire

Points fractionnaires du problème du sac-a-dos

- Montrer que le problème de sac-a-dos suivant est entier (où b est entier).

$$
\begin{aligned}
Max \ \sum_{i=1}^{n} x_i & \\
\sum_{i=1}^{n} x_i &\leq b \\
x_i &\leq 1, \ \forall i = 1, \ldots, n \\
x_i &\geq 0, \ \forall i = 1, \ldots, n \\
x_i &\in \mathbb{N}, \ \forall i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Points fractionnaires du problème du sac-a-dos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq b \tag{1}$$
$$0 \leq x_i \leq 1,\ \forall i = 1, \ldots, n \tag{2}$$
$$x_i \in \mathbb{N},\ \forall i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

- point extrême $\Rightarrow \geq n$ inégalités serrées
- si (1) non vérifiée à l'égalité, alors les inégalités triviales sont serrées et le point est entier.
- sinon $(n-1)$ inégalités triviales serrées. Donc le point a $n-1$ composantes entières 0 ou 1. Soit N^+ les composantes à 1. La dernière composante vaut donc $z = b - |N^+|$. $0 \leq z \leq 1$ et z est entière.

Le PL du couplage biparti est TDI

- Le problème du couplage biparti correspond a une matrice TU
- donc le polyèdre associé est entier
- Montrer que le système est également TDI (ce qui amènera a la même conclusion sur l'intégrité du polyèdre)

$$
\begin{aligned}
Max \ & \sum_{e \in E} c(e)x(e) \\
& \sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 1, \ \forall u \in V_1 \\
& \sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 1, \ \forall u \in V_2 \\
& x(e) \geq 0, \ \forall e \in E
\end{aligned}
$$

Le PL du couplage biparti est TDI

Le dual (variables y (resp. z) correspondant aux contraintes sur V_1 (resp. V_2) :

$$Min \sum_{u \in V_1} y(u) + \sum_{v \in V_2} z(v)$$
$$y(u) + z(v) \geq c(e), \ \forall e \in E$$
$$y(u) \geq 0, \ \forall u \in V_1$$
$$z(v) \geq 0, \ \forall v \in V_2$$

$\tilde{x}$ solution entière du primal $\Rightarrow$ ensemble d'arêtes tq chaque sommet a exactement une arête sortante dans la solution. $\forall e = uv, \ u \in V_1$ de cet ensemble, posons $\tilde{y}(u) = c(e)$ et $\tilde{z}(v) = 0 \ \forall v \in V_2$.
Remarquons : $(\tilde{y}, \tilde{z})$ est entier, solution du dual et de valeur égale a la solution $\tilde{x}$ du primal. Le système est donc bien TDI.