La programmation mathématique en nombres entiers

Approches polyédrales

Stanislas Francfort

Orange Labs

4 novembre 2015

Approches polyèdrales

- *Approche polyédrale* **d'un problème d'optimisation combinatoire** :
- un problème d'optimisation combinatoire $\mathcal{P}$ peut souvent s'écrire comme un programme linéaire en nombres entiers $(P1)$:

$$Max\ \{cx|Ax \leq b, 0 \leq x \leq 1,\ x \text{ entier}\}$$

- où $Ax \leq b$ est un ensemble d'inégalités linéaires (nombre exponentiel possible)

Approches polyèdrales

- Si le polytope n'est pas entier (pas TU, pas TDI...)
- alors on va alors "renforcer" cette formulation

Approches polyèdrales

- Renforcement par des coupes :
- ces coupes donnent en général des solutions fractionnaires
- Approche polyédrale : on va chercher des contraintes pour définir un polytope entier
- Le problème $\mathcal{P}$ peut s'écrire également $max\{cx|x \in S\}$
- Considérons l'enveloppe convexe $conv(S)$ des solutions de $\mathcal{P}$
- Le problème $\mathcal{P}$ est alors équivalent au programme linéaire $max\{cx|x \in conv(S)\}$

Approches polyèdrales

- La caractérisation complète du polytope $conv(S)$ est généralement difficile a obtenir
- Une description complète du polyèdre peut comporter un nombre exponentiel d'inégalités
- Cependant, un nombre réduit de ces inégalités peut être suffisant : méthode de coupes, de coupes et branchement

Approches polyèdrales

- un polytope P de $\mathbb{R}^n$ est dit de dimension d si il y a au moins $d+1$ points affinement indépendants dans P
- Il est dit de *pleine dimension* si il est de dimension n
- Soit $ax \leq \alpha$ une inégalité valide de P. Le sous ensemble $F = \{x \in P \mid ax = \alpha\}$ est appelé *face* de P
- Si $F \neq \emptyset$ et $F \neq P$, alors on dit que F est une *face propre*

Theorem

Un sous ensemble F non vide de P est une face de P si et seulement si il existe un sous-système $A'x \leq b$ de $Ax \leq b$ tel que $F = \{x \in P \mid A'x = b'\}$

- Si F est une face propre et si $dim(F) = dim(P) - 1$, alors on dit que F est une *facette*

Points extrêmes et facettes du polytope du stable

- Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté sans boucle.
- Soit $P(G)$ le polytope des stables de G
- On va faire un début d'analyse polyèdrale de ce polytope.

$$P(G) = conv\{\chi^S | S \text{ est un stable de } G\}.$$

- Montrer que P(G) est de pleine dimension.

Points extrêmes et facettes du polytope du stable

$$P(G) = conv\{\chi^S | S \text{ est un stable de } G\}.$$

- Montrer que P(G) est de pleine dimension.
- Produisons $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ affinement indépendants.
- Par exemple, les vecteurs d'incidence de l'ensemble vide $\emptyset$ et des ensembles $E_u = \{u\},\ \forall u \in V$
- En effet, ces ensembles sont bien tous des stables. De plus, les vecteurs $\chi^{E_u} - \chi^{\emptyset}$ sont bien linéairement indépendants car la matrice formée par ces vecteurs-colonne est la matrice identité qui est inversible.

Points extrêmes et facettes du polytope du stable

- Montrez que ces contraintes sont valides pour $P(G)$:

$$x(v) \geq 0,\ \forall v \in V$$
$$x(u) + x(v) \leq 1,\ \forall uv \in E$$

Points extrêmes et facettes du polytope du stable

- Les contraintes triviales sont clairement valides
- Les contraintes de type $x(u) + x(v) \leq 1, \; \forall uv \in E$ sont valides pour $P(G)$ car tout vecteur d'incidence d'un stable les vérifie.
- En effet, les deux extrémités d'une arête ne peuvent toutes deux appartenir à un même stable.

Points extrêmes et facettes du polytope du stable

- Montrer que les contraintes $x(v) \geq 0$ définissent des facettes de $P(G)$.

Points extrêmes et facettes du polytope du stable

- Soit $v \in V$.
- Posons $F = \{\chi^S \in \mathbb{R}^n | S \text{ stable et } \chi^S(v) = 0\}$ la face associée à la contrainte $x(v) \geq 0$
- Pour prouver que cette face est une facette, il faut montrer qu'elle est propre et qu'elle contient n vecteurs affinement indépendants.
- F est bien propre car elle n'est pas vide (par exemple l'ensemble vide est un stable et son vecteur (nul) d'incidence appartient à F)
- et $F \neq P(G)$ (en effet, le vecteur d'incidence χ^{E_v} du stable E_v appartient à $P(G)$ mais pas à F
- De plus, les vecteurs $\chi^{E_\emptyset}$ et $\chi^{E_u},\ u \in V\{v\}$, sont bien n vecteurs d'incidence de stables affinement indépendants.

Points extrêmes et facettes du polytope du stable

- Soit K une clique de G (sous-graphe complet de G)
- Montrer que la contrainte suivante est valide :

$$\sum_{v \in K} x(v) \leq 1$$

- Montrer de plus qu'elle définit une facette de $P(G)$ lorsque K est une clique maximale au sens de l'inclusion (c'est-a-dire que K n'est pas contenue dans une clique plus grande)
- En déduire que les contraintes $x(u) + x(v) \leq 1$ peuvent ne pas définir des facettes.

Points extrêmes et facettes du polytope du stable

- La contrainte est bien valide car un stable ne peut pas contenir plus d'un sommet d'un graphe complet
- Sa face F associée est propre car elle n'est pas vide et est différente de $P(G)$ (ne contient pas $\chi^{\emptyset}$)
- De plus, considérons les vecteurs $E_u,\ u \in K$ qui sont $|K|$ vecteurs contenus dans F
- Il manque donc $n - |K|$ vecteurs à exhiber
- Or comme K est un sous-graphe complet maximal dans G, cela signifie que pour tout sommet $w \in V \backslash K$, il existe un sommet u_w dans K tel que w et u_w ne sont pas adjacents (en effet, dans le cas contraire, K ne serait pas maximale)
- Considérons alors les n stables $E_u,\ u \in K$ et les $\{w, u_w\},\ w \in V \backslash K$ qui sont n vecteurs affinement indépendants dans F
- La contrainte définit bien une facette de $P(G)$ *(cont...)*

Points extrêmes et facettes du polytope du stable

- En fait, les contraintes d'arêtes $x(u) + x(v) \leq 1$ sont des sous-graphes complets a 2 éléments.
- Par conséquent, ces contraintes ne vont définir des facettes que si elles sont maximales dans G
- Et inversement, si une arête est contenue dans un sous-graphe complet plus grand, alors sa face associée n'est pas une facette.

Points extrêmes et facettes du polytope du stable

- Soit C un cycle impair de G. Montrer que la contrainte suivante est valide pour G :

$$\sum_{v \in V(C)} x(v) \leq \frac{|C| - 1}{2}$$

Points extrêmes et facettes du polytope du stable

- Cette contrainte est équivalente au fait qu'un stable sur un cycle impair de taille k, ne peut contenir qu'au plus $\frac{k-1}{2}$ sommets du cycle
- C'est donc une contrainte valide

Points extrêmes et facettes du polytope du stable

- On a donc prouvé :
- $P(G)$ est de pleine dimension
- $x(v) \geq 0, \ \forall v \in V$, est valide et définit une facette
- $x(u) + x(v) \leq 1, \ \forall uv \in E$, est valide
- $\sum_{v \in K} x(v) \leq 1, \ \forall K$ clique, est valide et défini une facette
- $x(u) + x(v) \leq 1, \ \forall uv, \in V$, ne définit pas toujours une facette
- $\sum_{v \in V(C)} x(v) \leq \frac{|C|-1}{2}, \ \forall C$ cycle impair, est une contrainte valide

Définitions

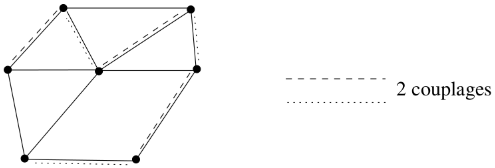
- On appelle *caractérisation* (ou *caractérisation complète*) d'un polyèdre le fait de décrire l'ensemble des inégalités qui composent ce polyedre
- ce qui en fait un polyèdre entier
- Si l'on connaît la caractérisation d'un polyèdre et si l'on sait énumérer ou séparer polynomialement toutes les inégalités
- Alors le problème d'optimisation sur ce polyèdre peut être résolu en temps polynomial.

Définitions

- Il existe plusieurs techniques pour caractériser un polyèdre :
  - montrer que les solutions optimales d'un PL et les points extrêmes du polyedre sont en bijection ; puis montrer que ce PL est TU ou TDI
  - énumérer toutes les familles de contraintes définissant des facettes du polyèdre

Le polytope du couplage

- Soit $G = (V, E)$ un graphe.
- Un couplage $M \subseteq E$ est un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non-adjacentes
- $c(e)$ le poids de e, $\forall e \in E$
- Déterminer un couplage dans G de poids total $\sum_{e \in M} c(e)$ maximum.



Formulation et points extrêmes

- Historique
    - le premier problème d'optimisation combinatoire qui a été étudié par une approche polyédrale (Jack Edmonds 1965)
    - Caractérisation complète du polyèdre.

Formulation et points extrêmes

- Formulation $\mathcal{P}$ en PLNE :
- Soit $x(e),\ e \in E$
- $x(e) = 1$ si e est dans le couplage, 0 sinon

$$Max \sum_{e \in E} c(e)x(e)$$

$$\sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 1,\ \forall e \in E$$

$$0 \leq x(e) \leq 1,\ \forall e \in E$$

$$x(e) \text{ entier } \ \forall e \in E$$

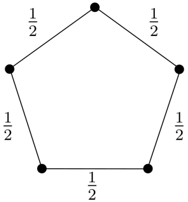
Formulation et points extrêmes

- Considérons le polyèdre associé au problème du couplage maximum
- On note $PM(G)$ l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence des couplages de G :

$$PM(G) = conv\{\chi^M \in \mathbb{R}^n | M \text{ couplage de } G\}.$$

- Malheureusement, la relaxation linéaire $\mathcal{P}^\star$ de $\mathcal{P}$ n'est pas une description du polyèdre $PM(G)$
- En effet, $\mathcal{P}^\star$ contient des points extrêmes fractionnaires dans le cas général

Formulation et points extrêmes



- $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- vérifie les inégalités
- et vérifie à l'égalité 5 contraintes associées aux sommets
- ces contraintes sont linéairement indépendantes
- $\Rightarrow$ c'est un point extrême fractionnaire

Formulation et points extrêmes

- On peut donc couper ce point
- Remarque : un couplage dans ce cycle contient ≤ 2 arêtes
- $\Rightarrow \sum_{i=1}^{5} x(e_i) \leq 2$ est valide pour $PM(G)$
- De plus, elle coupe un point fractionnaire indésirable.
- peut-on généraliser cette contrainte ?

Formulation et points extrêmes

- Généralisons $\sum_{i=1}^{5} x(e_i) \leq 2$
- Soit un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ avec $|S|$ impair
- $\Rightarrow$ un couplage de G aura $\leq \frac{|S|-1}{2}$ arêtes de $E(S)$
- Donc l'inégalité suivante est valide :

$$\sum_{e \in E(S)} x(e) \leq \frac{|S|-1}{2}, \ \forall S \subseteq V, \ |S| \text{ impair}$$

Etude faciale de PM(G)

- Ces contraintes sont-elles suffisantes pour décrire $PM(G)$?
- Ces contraintes sont-elles toutes nécessaires ?
- Approche polyèdrale : approfondir l'étude faciale de $PM(G)$

Etude faciale de PM(G)

Theorem (Proposition)

$PM(G)$ est de pleine dimension

Preuve : On veut déterminer $m+1$ vecteurs affinement indépendants dans $PM(G)$. Constatons tout d'abord que l'ensemble vide $\emptyset$ est un couplage de G. Donc le vecteur d'incidence de $\chi^{\emptyset} = (0, \ldots, 0) \in PM(G)$. Il suffit alors de trouver m vecteurs de $PM(G)$ linéairement indépendants.
Si l'on note $M_e = \{e\},\ e \in E$, les singletons arêtes de G. Alors M_e, est un couplage de G. De plus, la matrice formé par les vecteurs-lignes $M_e,\ e \in E$, est la matrice identité qui est bien inversible. Donc les vecteurs sont bien linéairement indépendants.
Par conséquent, $PM(G)$ est de pleine dimension.
Fin Preuve

Etude faciale de PM(G)

- Les trois familles de contraintes sont-elles valides pour $PM(G)$?
- Définissent-elles des facettes de PM(G) ?

$$0 \leq x(e) \leq 1, \ \forall e \in E \tag{1}$$

$$\sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 1, \ \forall u \in V \tag{2}$$

$$\sum_{e \in E(S)} x(e) \leq \frac{|S|-1}{2}, \ \forall S \subseteq V, |V| \text{ impair} \tag{3}$$

Etude faciale de PM(G)

Theorem (Proposition)

Les contraintes triviales $x(e) \geq 0$, $\forall e \in E$, définissent des facettes

Preuve : Tout d'abord, il faut prouver que ces contraintes sont bien valides. Ce qui est évident dans ce cas présent.
Soit $e \in E$. Il s'agit de montrer que la face
$F = \{x \in PM(G) | x(e) = 0\}$ est bien une facette.
Nous montrons en premier que F est propre. En effet, $F \neq \emptyset$ car $\chi^{\emptyset} \in F$. De plus, $F \neq PM(G)$ car $\chi^{M_e}(e) = 1$ et donc $\chi^{M_e} \in PM(G) \backslash F$.
Enfin, nous exhibons m vecteurs affinement indépendants dans F. Ce sont par exemple, les vecteurs $\chi^{\emptyset}$ et $\chi^{M'_e}, e \in E \backslash \{e\}$. Ainsi, la dimension de F est $m - 1$ et F est bien une facette.
Fin Preuve

Etude faciale de PM(G)

Theorem (Proposition)

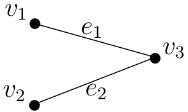
Les contraintes triviales $x(e) \leq 1, \ \forall e \in E$ ne définissent pas des facettes.

Preuve : En effet, ces contraintes sont redondantes par rapport aux contraintes de type $\sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 1$. Inversement, ces dernières contraintes ne peuvent pas être toutes obtenues comme somme des contraintes triviales. On dit que les contraintes de type $\sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 1$ dominent les contraintes triviales. Par conséquent, les contraintes triviales $x(e) \leq 1, \ \forall e \in E$ ne définissent pas de facettes.
Fin Preuve

Etude faciale de PM(G)

Theorem (Proposition)

Les contraintes de type $\sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 1$ ne définissent pas en général de facettes.



Preuve : Il suffit de produire un contre-exemple.
On prend les contraintes associée aux 3 sommets

$$\begin{aligned} x(e_1) + x(e_2) &\leq 1 \\ x(e_1) &\leq 1 \\ x(e_2) &\leq 1 \end{aligned}$$

La première domine les deux autres. $\Rightarrow$ pas des facettes.
Fin Preuve

Caractérisation complète de PM(G)

Theorem (Caractérisation du polytope des couplages)

Pour tout graphe $G = (V, E)$, le polyèdre des couplages $PM(G)$ est donné par les inégalités

- $0 \leq x(e) \leq 1, \ \forall e \in E$
- $\sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 1, \ \forall u \in V$
- $\sum_{e \in E(S)} x(e) \leq \frac{|S|-1}{2}, \ \forall S \subseteq V, |S|$ *impair*

- Comme ce polytope est entier :
- Un programme linéaire continu permet de résoudre le couplage maximum dans un graphe G

schéma de la preuve

Nous allons prouver un résultat intermédiaire :

Theorem (Caractérisation du polytope des couplages parfaits)

Pour tout graphe $G = (V, E)$, le polyèdre des couplages parfaits $PPM(G)$ est donné par les inégalités

- $0 \leq x(e), \ \forall e \in E$
- $\sum_{e \in \delta(u)} x(e) = 1, \ \forall u \in V$
- $\sum_{e \in \delta(S)} x(e) \geq 1, \ \forall S \subseteq V, |S| \text{ impair}, \ |S| \geq 3$

- C'est à dire : soit F l'ensemble des couplages parfaits de G
- On a : $conv(F) = PPM(G)$

schéma de la preuve

- $conv(F) \subseteq PPM(G)$, car toutes les inégalités sont valides
- pour l'inverse : supposons $G = (V, E)$ un graphe tel que $conv(F) \subsetneq PPM(G)$ et $|V| + |E|$ est le plus petit possible
- Soit x un point extrême de $PPM(G) \backslash conv(F)$
- pour chaque arête $e = uv \in E$, $x_e > 0$, sinon nous pourrions retirer e de E (plus petit contre exemple)
- $x_e < 1$, sinon on pourrait remplacer V par $V \backslash \{u, v\}$, et retirer de E toutes les arêtes incidentes à u et v (plus petit contre exemple)

schéma de la preuve

- on a donc $0 < x(e) < 1 \ \forall e \in E$.
- les contraintes de PPM impliquent que le degré de chaque sommet est au moins 2
- supposons que tous les degrés soient exactement 2, alors x est une union de cycles, et sur chaque cycle, les valeurs alternent $\alpha, (1-\alpha), \alpha, (1-\alpha), \ldots$, avec $\alpha \in]0,1[$ (le cycle étant impair par la dernière série de contrainte).
- Mais ceci n'est pas un point extême (ajouter/soustraire ϵ alternativement sur les arêtes).
- Donc tous les degrés sont ≥ 2, et quelques uns sont > 2
- ceci implique que $|E| > |V|$

schéma de la preuve

- Soit x un point extrême de $PM(G)$. Alors il y a $|E|$ contraintes serrées linéairement indépendantes (avec $|E| > |V|$)
- Comme il n'y a que $|V|$ contraintes aux sommets, alors il existe $S \subset V$, avec $|S|$ impair, $|S| \geq 3$ et $\sum_{e \in \delta(S)} x_e = 1$
- Contracter $V \backslash S$ en un unique point u pout obtenir $G' = (S \cup \{u\}, E')$
- $x'_e = x_e$ pour chaque $e \in E(S)$, et pour $v \in S$:

$$x'_{\{u,v\}} = \sum_{j \in V \backslash S, \{v,j\} \in E} x_{\{v,j\}}$$

- x' satisfait les contraintes associées à G'

schéma de la preuve

- Comme G est un plus petit contre-exemple, x' appartient à l'enveloppe convexe des couplages de G'

$$x' = \sum_{M' \text{ couplage parfait de } G'} \lambda_{M'} \chi^{M'}$$

- contracter S en un unique sommet t, pour obtenir un graphe $G'' = (V \backslash S \cup \{t\}, E'')$, et un vecteur x'' :

$$x'' = \sum_{M'' \text{ couplage parfait de } G''} \mu_{M''} \chi^{M''}$$

schéma de la preuve

- "Recoller" ensemble les couplage M' et M'' :
- comme $x = x'$ sur S, $x = x''$ sur $V \backslash S$, et $x' = x''$ sur $\delta(S)$, on peut exprimer x comme combinaison convexe de deux vecteurs x' et x'' représentant les couplages M' et M''
- x combinaison convexe de deux couplages $\Rightarrow$ x n'est pas un point extrême de PPM, ce qui est une contradiction
- l'hypothèse $conv(F) \subsetneq PM(G)$ mène à une contradiction $\Rightarrow$ $conv(F) = PM(G)$, CQFD

schéma de la preuve

- Le théorème de caractérisation du polytope des couplages parfaits permet d'obtenir le théorème de caractérisation du polytope des couplages
- Soit G' une copie de G
- et soit $\tilde{G} = G \cup G' \cup_{v \in G} (v, v')$
- définir $\tilde{x}$, sur les arêtes de $\tilde{G}$, tel que $\tilde{x}(e) = \tilde{x}(e') = x(e)$, et $\tilde{x}(v, v') = 1 - x(\delta(v))$
- Si on prouve que $\tilde{x}$ est un couplage parfait de $\tilde{G}$, alors nous aurons prouvé l'implication, car si $\tilde{x}$ se décompose en une combinaison convexe de couplages parfaits de $\tilde{G}$. En se restregnant à G, on obtient que x est une combinaison convexe de couplages de G.

schéma de la preuve

- Prouvons que $\tilde{x}$ est un couplage parfait :
- Soit $\tilde{\delta}(v)$ les arêtes incidentes à v dans $\tilde{G}$
- $\tilde{x}(\tilde{\delta}(v) = 1 \; \forall v \in V$
- Nous avons besoinde prouver que $\forall \tilde{S}$ impair dans $\tilde{G}$, alors $\tilde{x}(\tilde{\delta}(\tilde{u})) \leq 1$
- Soit $\tilde{S}$ impair, $\tilde{U} = X \cup Y'$ (avec $X \in V$, et $Y' \in V'$)
- Comme $\tilde{U}$ impair, alors soit X soit Y impair
- On a donc : Soit $X \backslash Y$, soit $Y \backslash X$ impair

schéma de la preuve

- Sans perte de généralité supposons que $X \backslash Y$ impair
- Comme x satisfait la contrainte $x(E(X \backslash Y)) \leq \frac{(|X \backslash Y|-1)}{2}$
- on obtient :

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}(\tilde{\delta}(X \backslash Y)) &= \sum_{v \in X \backslash Y} \tilde{x}(\tilde{\delta}(v)) - 2\tilde{x}(E(X \backslash Y)) \\
&\geq |X \backslash Y| - 2\frac{(|X \backslash Y| - 1)}{2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

schéma de la preuve

- Finalement :

$$\tilde{x}(\tilde{\delta}(X \cup Y')) \geq \tilde{x}(\tilde{\delta}(X \backslash Y)) \geq 1$$

- En effet, compter les arêtes du schéma suivant
- Donc $\tilde{x}$ satisfait les contraintes du polytope du couplage parfait PPM(G). CQFD